№ 2 ДЗ 4  Ниже везде $|u(x,t)| < Const$

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + t + e^t & -\infty < x < +\infty \quad t > 0 \\ u(x,0) = 2 & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

Начальная температура и плотность распред источников тепла не зависят от $x$

$\Rightarrow u(x\,t) \equiv v(t)$

$$\begin{cases} v_t = t + e^t \\ v(0) = 2 \end{cases}$$

$$v = \underbrace{\int_0^t (\tau + e^\tau)\,d\tau}_{\shortparallel} + 2 = \frac{t^2}{2} + e^t - 1 + 2 = \boxed{e^t + \frac{t^2}{2} + 1}$$

$$\int_0^t v_t\,dt = v(t) - v(0) = v(t) - 2$$

№ 4

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t}\cos x, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \cos x, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

Попробуем найти решение в виде

$u(x,t) = \cos x \cdot T(t)$

$$\begin{cases} T' \cdot \cos x = -\cos x \cdot T + e^{-t}\cos x \\ \cos x \cdot T(0) = \cos x \end{cases}$$

$$\begin{cases} T' = -T + e^{-t} \\ T(0) = 1 \end{cases}$$

$T = e^{-t} \cdot c(t)$

$e^{-t} \cdot c'(t) = e^{-t}$

$c'(t) = 1$

$c(t) = t + \tilde{c}$

$T(0) = c(0) = \tilde{c} = 1$

$\Rightarrow T = (e^{-t})(1+t)$

$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = e^{-t}\cos x\,(1+t)}$

№ 5

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^t \sin x & -\infty < x < +\infty \quad t > 0 \\ u(x,0) = \sin x & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

Попробуем найти решение в виде

$u(x,t) = \sin x \cdot T(t)$

$$\begin{cases} T' = -T + e^t \\ T(0) = 1 \end{cases}$$

$T = e^{-t} c(t)$

$e^{-t} c'(t) = e^t$

$c'(t) = e^{2t}$

$c(t) = \frac{e^{2t}}{2} + \tilde{c}$

$c(0) = \frac{1}{2} + \tilde{c} = 1$

$\tilde{c} = 1/2$

$T = \frac{e^{-t} + e^t}{2}$

$$u = \boxed{\sin x \cdot \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)}$$

№ 17 ДЗ 4 2/4

$u_t = u_{xx} \qquad -\infty < x < +\infty \qquad t > 0$

$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-\alpha x} & x > 0 \end{cases} \qquad \alpha = const > 0$

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u(y,0)\, dy =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}} \cdot e^{-\alpha y}\, dy = \Big\{ -\frac{x^2 + 2xy - y^2 - 4t\alpha y}{4t} =$$

$$= -\frac{x^2 - 2xy + y^2 + 4t\alpha y}{4t} = -\frac{y^2 + 2(2t\alpha - x) + x^2 + (2t\alpha - x)^2 - (2t\alpha - x)^2}{4t}$$

$$= -\frac{(y + (2t\alpha - x))^2 + x^2 - (2t\alpha - x)^2}{4t} = -\left(\frac{y + 2t\alpha - x}{2\sqrt{t}}\right)^2 - \frac{4t^2\alpha^2 - 4t\alpha x}{4t} =$$

$$= -\left(\frac{y + 2t\alpha - x}{2\sqrt{t}}\right)^2 - \alpha^2 t - \alpha x \Big\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\alpha^2 t - \alpha x} 2\sqrt{t} \int\limits_{\frac{2\cdot t\alpha - x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 t - \alpha x} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi\left(\frac{2t\alpha - x}{2\sqrt{t}}\right)\right) =$$

$$= \boxed{\frac{e^{-\alpha^2 t - \alpha x}}{2} \left(1 - \Phi\left(\frac{2\alpha t - x}{2\sqrt{t}}\right)\right)}$$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & x>0 \quad t>0 \\ u(0,t) = u_0 \neq 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

$u = v + u_0$ – замена

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} & x>0 \quad t>0 \\ v(0,t) = 0 & t \geq 0 \\ v(x,0) = -u_0 & x \geq 0 \end{cases}$$

т. к условие I рода, то продолжаем $v(x)$ нечетным образом

$$v(x,0) = \begin{cases} u_0 & x \leq 0 \\ -u_0 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$v(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} u_0 \, dy - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} u_0 \, dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( -\int_{+\infty}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-y^2} u_0 \, dy \right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{-\infty} e^{-y^2} u_0 \, dy =$$

$$= \left( +\frac{1}{\pi} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-y^2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-y^2} dy \right) u_0 =$$

$$= \left( +\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) \right) u_0 =$$

$$= \left[ +\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2} \right) \cdot u_0 = -u_0 \cdot \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

$$\boxed{u(x,t) = u_0 + (-u_0) \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)}$$

$$\lim_{t \to +\infty} u(x,t) = \lim_{t \to +\infty} \left( u_0 - u_0 \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right) = u_0 - u_0 \Phi(0) = \boxed{u_0}$$

Поток тепла через конец $x = 0$

$$u_x(0,t) = -u_0 \Phi'_x\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\Big|_{x=0} \cdot \frac{1}{2a\sqrt{t}} = -\frac{u_0 \, 2}{2a\sqrt{t\pi}} e^{-x^2}\Big|_{x=0} = \boxed{-\frac{u_0}{a\sqrt{t\pi}}}$$

№22 ДЗ 4

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - h(u - u_0) & 0 < x < +\infty \quad t > 0 \\ & h = const > 0 \\ u(0, t) = u_0 & t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & 0 \le x < +\infty \end{cases}$$

Полубесконечный стержень
На боковой пов-ти теплообмен со средой по закону Ньютона.
Левый конец $x = 0$ поддерживается при темп. $u_0$
Начальная температура нулевая.

Замена $u = u_0 + e^{-ht} \cdot v$

$$-he^{-ht} \cdot v + e^{-ht} v_t = a^2 v_{xx} - h(e^{-ht} v + u_0 - u_0)$$

$$u_0 + e^{-ht} v = u_0 \Rightarrow v(0, t) = 0$$
$$u_0 + v = 0$$

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} & 0 < x < +\infty \\ v(0, t) = 0 & t > 0 \\ v(x, 0) = -u_0 & 0 \le x < +\infty \end{cases}$$

Из №21 $v(x, t) = -u_0 \, \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{u(x, t) = u_0 - u_0 e^{-ht} \, \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)}$$